

**Grado en Biotecnología**  
**Análisis Matemático – Evaluación 2**

1. Se considera la matriz

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula los valores de  $a$  para los que dicha matriz es diagonalizable.
- b) Para  $a = 3$  calcula las matrices  $\mathbf{D}$ , diagonal, y  $\mathbf{P}$ , inversible, tales que  $\mathbf{M} = \mathbf{PDP}^{-1}$ .
- c) Calcula la matriz  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^n} \mathbf{M}^n$  donde  $\lambda$  es el valor propio dominante.
2. Supongamos que una población de animales hembras está dividida en dos grupos de edad: jóvenes y adultos. En cada etapa la cuarta parte de jóvenes llegan a adultos. De una etapa a otra los adultos mueren. El número medio de crías de cada joven es de  $1/2$  y el de cada adulto es de 2. Sea  $\mathbf{X}(n) = (x(n), y(n))^T$  el vector que nos da la población de jóvenes y adultos en la etapa  $n$ .
- a) Comprueba que la dinámica de la población responde al modelo  $\mathbf{X}(n+1) = \mathbf{MX}(n)$  donde  $\mathbf{M}$  es una matriz de Leslie.
- b) Diagonaliza la matriz  $\mathbf{M}$  y calcula  $\mathbf{M}^n$  (debes expresar todos los elementos de  $\mathbf{M}^n$  en función de  $n$  de la forma más simplificada posible).
- c) Calcula la matriz  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}^n$ .
- d) Discute el comportamiento en el futuro de la población y calcula las proporciones a largo plazo de los grupos de edad.
3. Un cultivo de plantas que, según su genotipo, pueden dar flores azules (AA), verdes (Aa) o amarillos (aa), se somete a un proceso de polinización en el cual las plantas de flores azules se fecundan con polen de plantas de flores amarillas, las de flores verdes con polen de ellas mismas y las de flores amarillas con polen de plantas de flores azules.
- a) Expresa este proceso como una cadena de Markov.
- b) Comprueba que la matriz de transición es primitiva.
- c) Calcula las probabilidades a largo plazo de cada uno de los genotipos AA, Aa y aa.